助成番号　210603

5－2

研 究 成 果 報 告 書

研究テーマ（和文）	有限要素法を用いた拘束条件付き発展方程式の安定化パラメータの推定について		
研究テーマ（英文）	On estimation of parameters for stability of evolution system with constraints by finite element method		
研究期間	2021年11月 ～ 2022年11月	研究機関名　八戸工業大学	
研究代表者	氏名（漢字）	土屋　拓也	
	氏名（カタカナ）	ツチヤ　タクヤ	
	氏名（英文）	Takuya TSUCHIYA	
	所属機関・職名	八戸工業大学・准教授	
共同研究者 ＊2名をこえる場合は、【別紙追加用紙】(P3)に3人目以降を追記してください。	氏名（漢字）		
	氏名（カタカナ）		
	氏名（英文）		
	所属機関・職名		
	氏名（漢字）		
	氏名（カタカナ）		
	氏名（英文）		
	所属機関・職名		

概要 （600 字～800 字程度にまとめてください。）

拘束条件を付帯する発展方程式系の安定性解析を主目的としている。その際に、拘束条件を発展方程式に付加し時間的に漸近安定化を図る手法が良く用いられる。付加する拘束条件項には、基本的にその大きさを決めるパラメータが存在し、そのパラメータの適切値は一般に試行錯誤により決定する。本研究では、有限要素法を用いて行列解析の観点から値の推測を行うことを目的とする。

計画では拘束条件付き発展方程式系に対し実施する予定であったが、適切な発展方程式系が見つからなかった。そのため、代替案として計画段階で提案していた KdV 方程式に対する速度パラメータの適切値の研究に切り替えた。KdV 方程式では、速度パラメータは 3 回微分項の係数に含まれ、有限要素法で弱形式を構築すると、この項は 2 回微分項となる。そこで、この微分項の適切な離散化手法の構築が必要となる。また、有限要素法では行列の形に変形していくため、その安定性解析には固有値が鍵となる。したがって、以下の 3 つの項目に分けて研究を進めた。

1. 2 階微分の離散表記については複数の表現方法があり、その違いと数値安定性、数値計算における精度を調査した。その成果は arXiv:2203.09074 と arXiv:2211.09031 にある。
2. 別の発展方程式系に対し固有値解析を行い、数値的に固有値を求めその結果と安定性との関係性を調査した。その成果は Classical and Quantum Gravity 39(16) 165002 にある。ただし、この結果を KdV 方程式に適用したところ、初期値に対する速度パラメータへの安定性の違いは見られなかった。このことから、固有値に安定性の影響が表れるとすれば、固有値を用いた時系列解析まで発展させる必要があると思われる。
3. 最適なパラメータの探査の例として、別の発展方程式系に対し適切なパラメータを試行錯誤で探し出し、その結果を数値計算で試した。この成果は JSIAM Letters 14 84-87 にある。

以上の成果は KdV 方程式以外に差分法で実施したものであり、今後これらの工夫を有限要素法で弱形式化し離散化した KdV 方程式に適用し調査を行う。その後、拘束条件付き発展方程式に適用していく予定である。

発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。）

雑誌	論文課題	Stable numerical simulation of Einstein equations in gravitational collapse space--time				
	著者名	T. Tsuchiya, R. Urakawa, G. Yoneda	雑誌名	JSIAM Letters		
	ページ	84～87	発行年	2022	巻号	14
雑誌	論文課題	On the stability of covariant BSSN formulation				
	著者名	R. Urakawa, T. Tsuchiya, G. Yoneda	雑誌名	Classical and Quantum Gravity		
	ページ	165002-1～165002-17	発行年	2022	巻号	39
雑誌	論文課題					
	著者名		雑誌名			
	ページ	～	発行年		巻号	
図書	書名					
	著者名					
	出版社		発行年		総ﾍﾟｰｼﾞ	
図書	書名					
	著者名					
	出版社		発行年		総ﾍﾟｰｼﾞ	

英文抄録（100 語～200 語程度にまとめてください。）

We study the stability of the evolution system with constraints. It is often used the method by adding constraint terms to the evolution equations. There are some parameters which are determined the size of the added terms, and the appropriate values of the parameters are generally given by trial and error. The purpose of this study is to estimate the values from the viewpoint of the matrix analysis using the finite element method.

The plan was to find and/or construct suitable constrained evolution systems, but an appropriate system of evolution equations could not be found. Thus, we switch the study from the analysis of the constrained systems to the one of the KdV equation. This is because the KdV equation has a velocity parameter whose magnitude affects the numerical stability.

The discretized equation of the KdV equation by the finite element method has the second-order discrete term with the velocity parameter. It is necessary to construct an appropriate discretization method for this term since the term would be a factor of the numerical stability. In addition, since the finite element method puts the evolution equations in matrix form, the eigenvalues of the matrix are key to the stability analysis of the equations. Therefore, we study the appropriateness of the second-order discrete term, the eigenvalue analysis of the evolution system, and the parameter estimation of the evolution system.

These results have been obtained by discrete systems with the finite difference method other than the KdV equation. We will apply these results to the discrete KdV equation with the finite element method in future work.