助成番号 190367

５－２

研 究 成 果 報 告 書

研究テーマ（和文）	相分離を記述する偏微分方程式の動的境界条件下での可解性と境界拡散の消滅について		
研究テーマ（英文）	On a partial differential equation for the phase separation with dynamic boundary condition and vanishing boundary diffusion		
研究期間	2019年 ～ 2022年	研究機関名 京都教育大学	
研究代表者	氏名	（漢字）	深尾 武史
		（カタカナ）	フカオ タケシ
		（英文）	Takeshi Fukao
	所属機関・職名		京都教育大学 教育学部・教授
共同研究者（１名をこえる場合は、別紙追加用紙へ）	氏名	（漢字）	
		（カタカナ）	ピエールルイージ コリー
		（英文）	Pierluigi Colli
	所属機関・職名		パヴィア大学 数学科・教授

概要 （600 字～800 字程度にまとめてください。）

偏微分方程式の初期値境界値問題に対する可解性を論じる際に課す条件として、時間微分を含む境界条件として動的境界条件が注目されている。本研究では相分離現象を記述する偏微分方程式としてよく知られるカーン・ヒリアード方程式を動的境界条件の下で考察し、動的境界条件に境界拡散項を含む問題から粘性消滅法により漸近解析を行い、境界拡散項が解の正則性に与える役割を関数空間の種別によって明確にすることを目的とする。

粘性消滅法による境界拡散のない極限問題の可解性は、境界上の方程式の種別によって問題は異なっても、本質的には境界拡散のある問題と比較し、境界上の空間正則性が下がることが予想されていた。実際、境界上アレン・カーン方程式の場合には、境界では法線方向微分と単調項の両者が「次数 1/2 のソボレフ空間」の共役空間に属するクラスで正則性が得られ、境界方程式は変分等式として満たされることが予想通り証明できた。一方、単調項にある増大条件を仮定すれば、境界単調項の正則性が「2 乗可積分なルベーグ空間」まで上げられ、それに伴い内部正則性が「次数 3/2 のソボレフ空間」まで引き上げられることが新たに証明できた。この場合、解は境界上でも変分等式では無く方程式として意味を持つことが分かった。

この結果は境界上カーン・ヒリアード方程式の場合にも応用できた。この種の問題には GMS モデルと LW モデルの 2 種が有名であるが、いずれの場合にも同様の結果が得られた。さらに、この境界上カーン・ヒリアード方程式に関する研究を通じて、粘性消滅法による極限問題は、ある特別な単調項と非単調項の場合には、一見すると時間後方問題と見なせることに着想が至った。時間後方問題は一般的には逆問題として非適切であることがよく知られている。よって、得られた結果からこの極限問題は本質的に時間後方問題ではないと言えるが、その方程式の見た目と適切性の結果のずれが興味深く、今後新たに明確にすべき研究課題が見つかった。

発表文献　（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。）

雑誌	論文課題	On a perturbed fast diffusion equation with dynamic boundary conditions				
	著者名	Takeshi Fukao	雑誌名	Advances in Mathematical Sciences and Applications		
	ページ	365～392	発行年	2020	巻号	Vol.29, No.2
雑誌	論文課題	Vanishing diffusion in a dynamic boundary condition for the Cahn-Hilliard equation				
	著者名	P. Colli and T. Fukao	雑誌名	Nonlinear Differential Equations and Applications		
	ページ	1～27	発行年	2020	巻号	Vol.27, Article 53
雑誌	論文課題	The Cahn-Hilliard equation with forward-backward dynamic boundary condition via vanishing viscosity				
	著者名	P. Colli, et al.	雑誌名	SIAM Journal on Mathematical Analysis		
	ページ	3292～3315	発行年	2022	巻号	Vol.54, No.3
雑誌	論文課題	A Cahn-Hilliard system with forward-backward dynamic boundary condition and non-smooth potentials				
	著者名	P. Colli, et al.	雑誌名	Journal of Evolution Equation		
	ページ	1～31	発行年	2022	巻号	Vol.22, Article 89

英文抄録　（100語～200語程度にまとめてください。）

The initial boundary value problems for the Cahn-Hilliard system subject to various type of dynamic boundary conditions are treated. The main subject is to prove the well-posedness for the problem without surface diffusions and to compare the regularity of solutions between the problem with surface diffusions by the vanishing viscosity method.

In the case of Allen-Cahn type dynamic boundary condition, by the asymptotic analysis as the diffusion coefficient tends to 0, one can expect that the solution of the limiting problem losses some regularity. Indeed, the system we investigate is rather complicate due to the presence of nonlinear terms including general maximal monotone graphs both in the bulk and on the boundary. The two graphs are related each to the other by a growth condition, with the boundary graph that dominates the other one. In general, at the asymptotic limit a weaker form of the boundary condition is obtained, but in the case when the two graphs exhibit the same growth the boundary condition still holds almost everywhere and them one can gain the higher regularity.

The same results are obtained for the GMS model and LW model, that is, Cahn-Hilliard type dynamic boundary condition. Additionally, in the case of suitable monotone term, the boundary condition without the surface diffusion is formulated as the time-backward like problem. In general, the backward problem is ill-posed, therefore the clarification of this gap is a new research issue.