

## 研究 成 果 報 告 書

(国立情報学研究所の民間助成研究成果概要データベース・登録原稿)

|   |   |         |         |         |               |
|---|---|---------|---------|---------|---------------|
| 研究テーマ<br>(和文) AB  | グラフのハミルトン閉路に関する Nash-Williams と Grunbaum 予想の解決                                |         |         |         |               |
| 研究テーマ<br>(欧文) AZ  | Nash-Williams and Grunbaum conjecture related to Hamiltonian cycles in graphs |         |         |         |               |
| 研究氏<br>代<br>表<br>名<br>者   | カナ CC   | 姓) オゼキ  | 名) ケンタ  | 研究期間 B  | 2014 ~ 2016 年 |
|   | 漢字 CB   | 小関      | 健太      | 報告年度 YR | 2016 年        |
|   | ローマ字 CZ   | Ozeki   | Kenta   | 研究機関名   | 国立情報学研究所      |
| 研究代表者 CD<br>所属機関・職名   | 国立情報学研究所 ビッグデータ数理国際研究センター・特任助教  |         |         |         |               |
| <p>概要 EA (600 字～800 字程度にまとめてください。)</p> <p>本研究の目的は、40 年以上未解決でありグラフ理論全体の中でも重要な以下の予想の解決であった。</p> <p>予想 (Grunbaum `70, Nash-Williams `73)</p> <p>トーラス上の 4-連結グラフはハミルトン閉路を持つ。</p> <p>残念ながら完全な解決を期間中に与えることはできなかったが、いくつかの重要な結果を示しており、それらを抜粋して報告する。</p> <p>発表文献一つ目の ``5-connected toroidal graphs are Hamiltonian-connected' ' では「トーラス上の 5-連結グラフはハミルトン連結である」という結果を示した。「ハミルトン連結」という性質は「ハミルトン閉路を持つ」という性質に類似しているが真に強いものである。特に、本研究では、既存の結果で使われている手法を改良することに成功し、この結果のみならず、さらなる発展が望めるものである。</p> <p>他の二つの発表文献は、予想の対象を少し変更した場合に起こる現象を示している。</p> <p>``A characterization of <math>K_{\{2,4\}}</math>-minor-free graphs' ' では、<math>K_{\{2,4\}}</math> をマイナーとして含まないグラフの完全な特徴付けを与えている。トーラスに埋め込めるグラフはいくつかのグラフをマイナーとして含まないもの、として特徴づけられるため、この観点からグラフの性質を調べたものである。この研究の系として「<math>K_{\{2,4\}}</math>-マイナーを持たない 3-連結グラフはハミルトン閉路を持つ」ことが示される。</p> <p>``Decomposing plane cubic graphs' ' では対象を 3-連結平面 3-正則グラフとし、特殊な性質を持つ木の存在性を示している。ここでの木の持つ性質は、ある意味でハミルトン性とは正反対のものであり、その差からハミルトン性が考察できる。</p> <p>それら 3 本の論文以外でも、4 本の出版済論文・3 本の出版予定論文・15 本の投稿論文を得ている。</p> |   |         |         |         |               |
| キーワード FA  | トーラス  | ハミルトン閉路 | グラフマイナー |         |               |

(以下は記入しないでください。)

|            |  |  |  |  |           |  |  |  |  |  |  |  |  |
|------------|--|--|--|--|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 助成財団コード TA |  |  |  |  | 研究課題番号 AA |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 研究機関番号 AC  |  |  |  |  | シート番号     |  |  |  |  |  |  |  |  |

| 発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。） |                    |  |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|-----------------------------------|--------------------|--|-------------------|------------------------|---|---|---|--------------------|-----|
| 雑誌                                | 論文標題 <sup>GB</sup> | 5-connected toroidal graphs are Hamiltonian-connected  |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 著者名 <sup>GA</sup>  | Kawarabayashi, Ozeki                                   | 雑誌名 <sup>GC</sup> | SIAM J. Discrete Math. |   |   |   |                    |     |
|                                   | ページ <sup>GF</sup>  | 112 ~ 140  | 発行年 <sup>GE</sup> | 2                      | 0 | 1 | 6 | 巻号 <sup>GD</sup>   | 30  |
| 雑誌                                | 論文標題 <sup>GB</sup> | A characterization of $K_{\{2,4\}}$ -minor-free graphs |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 著者名 <sup>GA</sup>  | Ellingham, Marshall, Ozeki, Tsuchiya                   | 雑誌名 <sup>GC</sup> | SIAM J. Discrete Math. |   |   |   |                    |     |
|                                   | ページ <sup>GF</sup>  | 955 ~ 975  | 発行年 <sup>GE</sup> | 2                      | 0 | 1 | 6 | 巻号 <sup>GD</sup>   | 30  |
| 雑誌                                | 論文標題 <sup>GB</sup> | Decomposing plane cubic graphs                         |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 著者名 <sup>GA</sup>  | Ozeki, Ye  | 雑誌名 <sup>GC</sup> | European J. Combin.    |   |   |   |                    |     |
|                                   | ページ <sup>GF</sup>  | 40 ~ 46  | 発行年 <sup>GE</sup> | 2                      | 0 | 1 | 6 | 巻号 <sup>GD</sup>   | 52A |
| 図書                                | 著者名 <sup>HA</sup>  |  |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 書名 <sup>HC</sup>   |  |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 出版者 <sup>HB</sup>  |  | 発行年 <sup>HD</sup> |                        |   |   |   | 総ページ <sup>HE</sup> |     |
| 図書                                | 著者名 <sup>HA</sup>  |  |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 書名 <sup>HC</sup>   |  |                   |                        |   |   |   |                    |     |
|                                   | 出版者 <sup>HB</sup>  |  | 発行年 <sup>HD</sup> |                        |   |   |   | 総ページ <sup>HE</sup> |     |

#### 欧文概要<sup>EZ</sup>

The purpose of this study is to solve the following conjecture, which is famous on graph theory.

Conjecture (Grunbaum `70, Nash-Williams `73)

Every 4-connected graph on the torus has a Hamiltonian cycle.

During the study, we gave several important results related to the conjecture. Here I introduce some of them.

In the first paper ``5-connected toroidal graphs are Hamiltonian-connected'' on the list, we proved that Every 5-connected graph on the torus is Hamiltonian-connected. The property of being Hamiltonian-connected is closely related to, but stronger than, that of being Hamiltonian. In this work, we improved a known method, called ``Tutte path''. This improvement would be able to be used to other works.

Other two papers considered situations that occur when we slightly change the targets.

The paper ``A characterization of  $K_{\{2,4\}}$ -minor-free graphs'' gives a complete characterization of graphs without  $K_{\{2,4\}}$  as a minor. Since it is known that graphs that can be embedded on the torus are characterized as forbidden minors, we can see graphs on the torus from this direction. As a corollary, it is shown that every 3-connected graph without  $K_{\{2,4\}}$ -minor is Hamiltonian.

In the paper ``Decomposing plane cubic graphs'', we focus on 3-connected 3-regular plane graphs and showed the existence of a spanning tree with certain conditions, which is in some sense opposite from Hamiltonian cycles. We can study the Hamiltonicity from the gap.

Except for those papers, we also gave four published papers, three accepted papers, and 15 submitted papers.