

## 研究成果報告書

(国立情報学研究所の民間助成研究成果概要データベース・登録原稿)

研究テーマ (和文) AB		臨界 Hardy の不等式の伸縮不変性とスペクトル理論への応用			
研究テーマ (欧文) AZ		Scale invariance of a critical Hardy inequality and its applications for spectral theory			
研究氏 代表名 者	カタカナ CC	姓)イオク	名)ノリスケ	研究期間 B	2014年11月～2016年10月
	漢字 CB	猪奥	倫左	報告年度 YR	2016年
	ローマ字 CZ	Ioku	Norisuke	研究機関名	愛媛大学
研究代表者 CD 所属機関・職名		愛媛大学大学院理工学研究科・准教授			
概要 EA (600字～800字程度にまとめてください。)					
対数型補正項を伴う臨界 Hardy の不等式について、高階化に伴う対数型特異性の相殺効果、一般化伸縮不変性、関連するスペクトル解析への応用について研究を行い、以下の研究成果を得た。					
1. 高階微分が持つ対数型特異性の相殺効果 対数型特異性は偏微分方程式や関数不等式の伸縮不変構造を壊すことが知られている。本研究テーマである伸縮不変構造について理解を深めるため、高階微分が持つ対数型特異性の相殺効果について研究を行った。本研究により、二階以上の高階微分は、一階微分が持ち得ない相殺効果を持つことを明らかにし、さらに可積分指数、微分階数、重み関数の指数について、対数型特異性を打ち消すための最適な条件を与えた。					
2. 一般化伸縮不変性 対数型特異性や対数型伸縮不変性は、臨界 Hardy の不等式、Trudinger-Moser 不等式、非線形偏微分方程式（特に指数型非線形項を持つ問題）などにおいて自然に現れる。とりわけ非線形偏微分方程式論において、非線形項がベキ関数の場合と指数関数の場合には明示的な伸縮不変性が知られている。本研究ではより一般の非線形項を考察することでベキ乗非線形項と指数型非線形項の関連性を考察し、両者をつなぐ一般化 Cole-Hopf 変換を導出することで、方程式を完全に保存する変換は上記の二通りしかありえないことを示した。また、得られた変換を非線形熱方程式に応用し、局所可解性についての分類を与える初期値の可積分条件を明示的に決定した。この熱方程式に対する結果は、Weissler によるベキ乗型非線形項に対する分類定理を、非線形項の増大度に仮定を置かない形で一般化したものである。					
キーワード FA	スケール不変性	臨界指数	Hardy の不等式	スペクトル解析	

(以下は記入しないでください。)

助成財団コード TA					研究課題番号 AA									
研究機関番号 AC					シート番号									

発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。）									
雑誌	論文標題 <sup>GB</sup>								
	著者名 <sup>GA</sup>		雑誌名 <sup>GC</sup>						
	ページ <sup>GF</sup>		発行年 <sup>GE</sup>					巻号 <sup>GD</sup>	
雑誌	論文標題 <sup>GB</sup>								
	著者名 <sup>GA</sup>		雑誌名 <sup>GC</sup>						
	ページ <sup>GF</sup>	～	発行年 <sup>GE</sup>					巻号 <sup>GD</sup>	
雑誌	論文標題 <sup>GB</sup>								
	著者名 <sup>GA</sup>		雑誌名 <sup>GC</sup>						
	ページ <sup>GF</sup>	～	発行年 <sup>GE</sup>					巻号 <sup>GD</sup>	
図書	著者名 <sup>HA</sup>								
	書名 <sup>HC</sup>								
	出版者 <sup>HB</sup>		発行年 <sup>HD</sup>					総ページ <sup>HE</sup>	
図書	著者名 <sup>HA</sup>								
	書名 <sup>HC</sup>								
	出版者 <sup>HB</sup>		発行年 <sup>HD</sup>					総ページ <sup>HE</sup>	

欧文概要 EZ

We study the critical Hardy inequality with logarithmic singular term and obtain some results for canceling effects in higher-order Hardy-Sobolev inequalities, a generalization of scale invariance, as follows:

1. Canceling effects of a logarithmic singularity in higher-order Hardy-Sobolev inequalities  
It is known that a logarithmic singular term breaks scale invariant structure of PDEs and functional inequalities. In order to study a scale invariant structure, we first focus on a canceling effect of a logarithmic singularity and obtain that higher order derivatives have some special cancelation which never appear in a study of the first order derivative. Furthermore, we clarify the optimal condition on the exponents of integrability, differentiability, and weights to cancel the logarithmic singularity.

2. Generalized scale invariance

Logarithmic singularity and logarithmic scale invariance naturally arises from the critical Hardy inequality, the Trudinger-Moser inequality, and nonlinear PDEs. In particular, it is well known that a power type and exponential type nonlinearity have its natural scale invariance. We study a relation between these two scale invariances by introducing a generalized Cole-Hopf transformation, and obtain that only the power type and the exponential nonlinear term have the exact scale invariances. Moreover, applying this transformation, we obtain a classification theory of existence and non-existence for the heat equation with general nonlinearities.