

## 研究 成 果 報 告 書

(国立情報学研究所の民間助成研究成果概要データベース・登録原稿)

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |         |                                                                                             |         |            |               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------------------------------------------------------------------------------------------|---------|------------|---------------|
| 研究テーマ<br>(和文) AB                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |         | 時間発展する境界条件を持つ楕円型方程式の非線形問題の解析                                                                |         |            |               |
| 研究テーマ<br>(欧文) AZ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |         | Analysis of a nonlinear problem for a elliptic equation with a dynamical boundary condition |         |            |               |
| 研究氏<br>代<br>表<br>名<br>者                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | カタカナ CC | 姓) カワカミ                                                                                     | 名) タツキ  | 研究期間 B     | 2011 ~ 2012 年 |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 漢字 CB   | 川上                                                                                          | 竜樹      | 報告年度 YR    | 2013 年        |
|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | ローマ字 CZ | KAWAKAMI                                                                                    | TATSUKI | 研究機関名      | 大阪府立大学        |
| 研究代表者 CD<br>所属機関・職名                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |         | 川上竜樹 大阪府立大学学術研究院第2学群数学系・講師                                                                  |         |            |               |
| <p>概要 EA (600 字～800 字程度にまとめてください。)</p> <p>完全流体に囲まれた個体の熱伝導のモデルとして現れる時間発展する境界条件付き拡散方程式において、個体内部とその外部で拡散力が異なる場合の一つの極限状態として現れる、時間発展する境界条件付き半線形楕円型方程式について解析した。ここでは個体内部における非線形性は最も単純である冪乗型の非線形性を考え、また領域は3次元以上の半空間とした。これは領域の境界が非有界となる最も代表的なものであるためである。この問題に対して次の研究成果を得た。</p> <p>1. 解の大域可解性(藤田指数の導出)</p> <p>本問題は楕円型方程式と分数冪拡散方程式の混合問題になっており、これまで既存の結果がなく、解の局所可解性でさえ未解決問題であった。ここでは非線形項の指数によって、ある指数以下では時間大域解は存在せず、その指数より真に大きければ時間大域解が存在するといういわゆる藤田指数を導出した。この結果は各時刻を止めるごとに現れる楕円型方程式の観点から得られる臨界指数とも一致しており、最善の結果である。</p> <p>また指数が藤田指数より真に大きい場合、ある量が十分小さい初期値に対して解の局所可解性を示した。この量は本問題に付随する自己相似変換に対して不変な量である。一方、指数が藤田指数以下の場合には局所可解性は未解決問題であり今後の進展が期待されている。</p> <p>2. 小さい解の時間大域挙動</p> <p>上で得られた小さな時間局所解は大域的に存在し、その漸近形はPoisson核であることを示した。本問題は半線形楕円型方程式と分数冪拡散方程式の混合問題であるため、それぞれの核である半空間のDirichlet境界条件下でのLaplacianのGreen関数とPoisson核の両方の影響を考察する必要がある。ここでは局所可解性のときに用いた評価をより詳細に適用する事により、Poisson核の影響が支配的である事を示した。</p> |         |                                                                                             |         |            |               |
| キーワード FA                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 大域挙動    | 半線形楕円型方程式                                                                                   | 藤田指数    | 時間発展する境界条件 |               |

(以下は記入しないでください。)

|             |  |  |  |  |           |  |  |  |  |  |  |  |  |
|-------------|--|--|--|--|-----------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 助成財団コード* TA |  |  |  |  | 研究課題番号 AA |  |  |  |  |  |  |  |  |
| 研究機関番号 AC   |  |  |  |  | シート番号     |  |  |  |  |  |  |  |  |

| 発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。） |                    |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|-----------------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------|------------------------------------|---|---|---|--------------------|----|
| 雑誌                                | 論文標題 <sub>GB</sub> | Large-time behavior of solutions of a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 著者名 <sub>GA</sub>  | M.Fila, K.Ishige,<br>T.Kawakami                                                                        | 雑誌名 <sub>GC</sub> | Advances in Differential Equations |   |   |   |                    |    |
|                                   | ページ <sub>GF</sub>  | 69～100                                                                                                 | 発行年 <sub>GE</sub> | 2                                  | 0 | 1 | 3 | 巻号 <sub>GD</sub>   | 18 |
| 雑誌                                | 論文標題 <sub>GB</sub> |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 著者名 <sub>GA</sub>  |                                                                                                        | 雑誌名 <sub>GC</sub> |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | ページ <sub>GF</sub>  | ～                                                                                                      | 発行年 <sub>GE</sub> |                                    |   |   |   | 巻号 <sub>GD</sub>   |    |
| 雑誌                                | 論文標題 <sub>GB</sub> |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 著者名 <sub>GA</sub>  |                                                                                                        | 雑誌名 <sub>GC</sub> |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | ページ <sub>GF</sub>  | ～                                                                                                      | 発行年 <sub>GE</sub> |                                    |   |   |   | 巻号 <sub>GD</sub>   |    |
| 図書                                | 著者名 <sub>HA</sub>  |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 書名 <sub>HC</sub>   |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 出版者 <sub>HB</sub>  |                                                                                                        | 発行年 <sub>HD</sub> |                                    |   |   |   | 総ページ <sub>HE</sub> |    |
| 図書                                | 著者名 <sub>HA</sub>  |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 書名 <sub>HC</sub>   |                                                                                                        |                   |                                    |   |   |   |                    |    |
|                                   | 出版者 <sub>HB</sub>  |                                                                                                        | 発行年 <sub>HD</sub> |                                    |   |   |   | 総ページ <sub>HE</sub> |    |

#### 欧文概要 <sub>EZ</sub>

We consider a semilinear elliptic equation with a dynamical boundary condition, which appears in numerous problems in the theory of heat conduction, in chemical reactor theory, and in colloid chemistry. In particular we consider this problem on the half space. For this problem, we obtain the following results.

##### (i) Local and global existence of solutions

We first prove that there is a critical exponent, which is called by the Fujita exponent, for the existence of positive solutions of this problem. Furthermore we give a sufficient condition for the local existence of nontrivial solutions of this problem for the super-critical case. This condition is invariant with respect to the similarity transformation for this problem.

On the other hand, in order to obtain the local existence, we can not apply this argument for the critical or sub-critical cases. This is one of open problems.

##### (ii) Large-time behavior of small solutions

For the super-critical case, we show that small solutions behave asymptotically like suitable multiples of the Poisson kernel. Because it is a mixing problem of fractional diffusion equations and semilinear elliptic equations, we need to consider the effects of both the Poisson kernel and Green functions of the Laplacian with Dirichlet boundary conditions on the half space which are kernels for each problems, respectively. Improving argument in the proof of the local existence, we see that the Poisson kernel is dominant for the asymptotic behavior of solutions here.