助成番号 090046		6 － 2

研 究 成 果 報 告 書

（国立情報学研究所の民間助成研究成果概要データベース・登録原稿）

研究テーマ（和文） AB	変分法による非線形楕円型方程式の解の形状および漸近挙動の研究				
研究テーマ（欧文） AZ	Research on shapes and asymptotic behavior of solutions of nonlinear elliptic equations via the variational method				
研究代表者氏名 カタカナ CC	姓）ワタナベ	名）タツヤ	研究期間 B	2009 ～ 2010 年	
漢字 CB	渡辺	達也	報告年度 YR	2010 年	
ローマ字 CZ	Watanabe	Tatsuya	研究機関名	大阪市立大学	
研究代表者 CD 所属機関・職名	渡辺達也・大阪市立大学 理学研究科 数学研究所・特任准教授				

概要 EA （600字～800字程度にまとめてください。）

プラズマ物理学に現れる準線形シュレディンガー方程式：

i Ψ_t = −ΔΨ+V(x)Ψ−|Ψ|^{p-1}Ψ−κΨΔ(|Ψ|^2)　　(1)

において，定在波解Ψ(t,x)=e^{iλt}u(x)を考える．このとき定常問題として得られる準線形楕円型方程式：

−Δu+(V(x)+λ)u−κuΔ(u^2)=|u|^{p-1}u in R^N.　　(2)

について解析を行った．

(1)においてκ=0 の場合については数多くの研究があり，定在波解の安定性についてはよく分かっている．一方でκ>0 の場合，モデルを導出したBrizhikら(2001)は形式的議論により，準線形項が定在波解を安定化させると主張した．しかしその厳密な証明は現在のところなされていない．その要因の一つは，定常問題の解構造が解明されていないことである．本研究では定常問題(2)に焦点を当て，解の存在および一意性を考察した．具体的には次のような結果を得た．

1. 空間非一様ポテンシャルに対する正値解の存在：ソボレフの埋め込みのコンパクト性の崩れから，ポテンシャルが空間非一様の場合，解が存在するかは非常にデリケートな問題となる．本研究では変分法を用いて，既存の結果と比べて広いクラスのポテンシャルに対し，正値解が存在することを示した．

2. 空間一様ポテンシャルに対するエネルギー最小解の存在および一意性： 正値解の存在については多くの結果があったが，物理学的に最も重要なエネルギー最小解の存在については，部分的な結果しか得られていなかった．本研究ではポテンシャルが定数のとき，(2)のエネルギー最小解の存在について考察し，存在に関するoptimalな結果を得た．さらに指数pなどに対するいくつかの条件の下，エネルギー最小解が一意であることを示した．

現在は解のκが0に近づいたときの漸近挙動を解析している．また，κが0のとき，定常問題の正値解は一意であることが知られていることから，エネルギー最小解の一意性に対する分岐理論を用いたアプローチも試みたいと考えている．

キーワード FA	変分法	準線形楕円型方程式	エネルギー最小解	定在波解

（以下は記入しないでください。）

助成財団コード TA					研究課題番号 AA									
研究機関番号 AC					シート番号									

発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入してください。）

雑誌	論文標題GB	G-invariant positive solutions for a quasilinear Schrodinger equation							
	著者名 GA	Adachi, Watanabe	雑誌名 GC	Preprint, submitted					
	ページ GF	～	発行年 GE					巻号 GD	
雑誌	論文標題GB	Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrodinger equations							
	著者名 GA	Adachi, Watanabe	雑誌名 GC	Preprint, submitted					
	ページ GF	～	発行年 GE					巻号 GD	
雑誌	論文標題GB								
	著者名 GA		雑誌名 GC						
	ページ GF	～	発行年 GE					巻号 GD	
図書	著者名 HA								
	書名 HC								
	出版者 HB		発行年 HD					総ﾍﾟｰｼﾞ HE	
図書	著者名 HA								
	書名 HC								
	出版者 HB		発行年 HD					総ﾍﾟｰｼﾞ HE	

欧文概要 EZ

We consider the standing wave $\Psi(t,x)=e^{i\lambda t}u(x)$ of the following quasilinear Schrodinger equation arising in plasma physics:

$$i\Psi_t = -\Delta\Psi+V(x)\Psi-|\Psi|^{p-1}\Psi-\kappa\Psi\Delta(|\Psi|^2). \qquad (1)$$

We study the following quasilinear elliptic problem which appears as the stationary problem:

$$-\Delta u+(V(x)+\lambda)u-\kappa u\Delta(u^2)=|u|^{p-1}u \quad \text{in} \quad R^N. \qquad (2)$$

When $\kappa=0$, problem (1) has been widely considered, and the stability of the standing wave is well-studied. On the other hand, Brizhik et al. (2001), who derived the model, stated by a formal argument that the quasilinear term stabilizes the standing wave if $\kappa>0$. But it is not yet given the rigorous proof. One of the reasons is that the solution set of the stationary problem is not clear. In this research, we focused on the stationary problem (2) and studied the existence and the uniqueness of solutions. More precisely, we obtain the following results.

1. Existence of a positive solution for non-constant potentials: When the potential is non-constant, the existence of solutions becomes a delicate problem because of the lack of the compactness of the Sobolev embedding. In this research, we proved the existence of a positive solution for a wider class of potentials, compared to previous works, by using the variational method.

2. Existence and uniqueness of ground states for constant potentials: There have been many results on the existence of positive solutions. But there is only a partial result on the existence of a ground state which is the most important in physics. In this research, we studied the existence of the ground state of (2) when the potential is constant. We obtained an optimal result for the existence. Moreover we proved the ground state is unique under some conditions on p.

We now work on asymptotic behavior of solutions as $\kappa\to 0$. When $\kappa=0$, it is known that the positive solution of the stationary problem is unique. From this fact, we will try an approach to the uniqueness of ground states by the bifurcation theory.