

研究成果報告書

(国立情報学研究所民間助成研究成果概要データベース・登録原稿)

研究テーマ (和文) AB		パンルヴェ方程式と無限次元可積分系の幾何学的研究			
研究テーマ (欧文) AZ		Geometric research on Painleve equations and infinite integrable systems			
研究氏代 表名 者	カタカナ CC	姓)ツダ	名)テルヒサ	研究期間 B	2007 ~ 2009 年
	漢字 CB	津田	照久	報告年度 Y	2009年
	ローマ字 CZ	Tsuda	Teruhisa	研究機関名	九州大学大学院数理学研究 院
研究代表者 CD 所属機関・職名		津田 照久, 九州大学・数理学研究院・助教			
概要 EA (600 字～800 字程度にまとめてください)					
(1) UC 階層とは普遍指標をタウ関数として許すような無限次元可積分系であり, KP 階層の自然な拡張を与えている。当該研究期間において, 懸案であった UC 階層に付随する線形補助問題(ラックス形式)の構成法を与えた。具体的な要点は, 線形問題の従属変数である所謂, 波動関数の選び方, 及び, UC 階層から閉じた関数方程式を得る仕組みを確立したということにある。後者については, 複素積分論の基本的な結果を用いるが, このような議論は従来の可積分系分野に見られないものであり, 初等的ではあるが興味深い。 (2) さらに, UC 階層の線形補助問題が得られた一つの恩恵として, UC 階層とモノドロミー保存変形の関係がより明確なものとなった。特に, パンルヴェ第 6 方程式やガルニエ系を含んだシュレジンジャー系の中のクラスについて, それらが UC 階層の相似簡約に由来するものであることを示した。例えば, パンルヴェ第 6 方程式の線形補助問題のうち最も標準的な, 2 階・確定特異点が 4 点であるものは UC 階層に自然に由来していることが分かる。当該, UC 階層とモノドロミー保存変形についての関係については, 継続的に考察するべきものであり, 今後のパンルヴェ方程式研究にとっても重要な課題と思われる。 (3) パンルヴェ方程式の一つの起源にある種の曲面上のアフィンワイル群の双有理表現がある。以前に, 研究代表者は, 曲面とは限らない, 高次元のある有理代数多様体に擬正則写像として作用するワイル群の双有理表現を構成した。この設定では, 対応するルート系は曲面の場合と比べて, より一般的なものを扱える上, 特に対称なアフィン型の場合をすべて網羅していることが大きな特色である。ルート系がアフィン型の場合, 離散可積分系として興味ある対象である高階 q-パンルヴェ方程式が導かれるが, 当該研究期間において, その力学系の次数増大度が高々 2 次であることを証明した。考えている有理代数多様体の(コ)ホモロジー群へのワイル群の作用を交差理論を用いて計算することが証明の主な部分である。また q-差分ではなく加法的な離散パンルヴェ方程式に関連して, T 字型のディンキン図形を持つワイル群の双有理作用と(その高さに対応する)タウ関数を構成した。 (4) フィボナッチ数列の満たす 4 項間漸化式を 2 次元離散力学系(これをフィボナッチ力学系と呼ぶ)とみなして考察した。フィボナッチ力学系の相空間を射影平面の無限回ブロー・アップとして構成し, 交点理論に基づいて, そのホモロジー群への線形作用を求めた。一つの応用として, 力学系の次数増大度からふたたびフィボナッチ数列が現れる現象を証明した。これはフィボナッチ数の新しい定義を与えていると解釈することもできる。 (5) 一般解が知られている関数で解かれるにも関わらずカオス的な振る舞いを示す力学系, 所謂, 可解カオス力学系についての研究を行った。具体的には楕円曲線, またはある有理楕円曲面(ヘッセ・ペンシル), 上の N 倍角写像に由来するようなそれぞれ 1 次元, 2 次元の力学系を考察した。特に, この力学系が超離散類似を許す事, トロピカル幾何学的な記述を持つ事等を示した。一つの帰結として, テント写像と呼ばれる基本的なカオス力学系に対して, あるトロピカル楕円曲線の(ヤコビ多様体上での)倍角写像としての幾何的描像を与えた。					
キーワード FA	パンルヴェ方程式	可積分系	普遍指標	フィボナッチ数列	

(以下は記入しないでください)

助成財団コード TA						研究課題番号 AA							
研究機関番号 AC						シート番号							

発表文献（この研究を発表した雑誌・図書について記入して下さい）									
雑誌	論文標題 GB	Universal character and q-Painleve equations							
	著者名GA	T. Tsuda	雑誌名GC	Mathematische Annalen					
	ページGF	395～415	発行年GE	2	0	0	9	巻号 GD	345
雑誌	論文標題 GB	Tropical representation of Weyl groups associated with certain rational varieties							
	著者名GA	T. Tsuda and T. Takenawa	雑誌名GC	Advances in Mathematics					
	ページGF	936～954	発行年GE	2	0	0	9	巻号 GD	221
雑誌	論文標題 GB	A geometric approach to tau-functions of difference Painleve equations							
	著者名GA	T. Tsuda	雑誌名GC	Letters in Mathematical Physics					
	ページGF	65～78	発行年GE	2	0	0	8	巻号 GD	85
図書	著者名HA								
	書名HC								
	出版者HB		発行年HD					総ページ HE	
図書	著者名HA								
	書名HC								
	出版者HB		発行年HD					総ページ HE	

欧文概要EZ

- (1) The UC hierarchy is an infinite-dimensional integrable system satisfied by the universal characters and is an extension of the KP hierarchy. In the present research project, we have established a method to obtain an auxiliary linear problem associated with the UC hierarchy (Lax formalism), that is, found how to define the wave function and to derive a 'closed' functional equation from the hierarchy.
- (2) Moreover, by means of the functional equations of the UC hierarchy, a connection between the UC hierarchy and the theory of monodromy preserving deformations has been clarified. A broad class of the Schlesinger systems including the Garnier system and the sixth Painleve equation turns out to be equivalent to a similarity reduction of the UC hierarchy.
- (3) We construct a tropical (subtraction-free birational) representation of Weyl groups as a group of pseudo-isomorphisms of certain rational varieties. We develop an algebro-geometric framework of tau functions as defining functions of exceptional divisors of the varieties. In the case where the corresponding root system is of affine type, our construction yields a class of (higher order) q-Painleve equations and its algebraic degree grows quadratically.
- (4) We study the four-term recursion relation of the Fibonacci numbers as a two-dimensional discrete dynamical system (call it the Fibonacci dynamics). A phase space of the dynamics is constructed from the projective plane by applying infinitely many blowing-ups. By using a cohomological technique, we determine the algebraic degree growth of the dynamics and show that the Fibonacci numbers are again recovered from the degree growth.
- (5) We explore a solvable chaotic system, which is regarded as dynamical system lying on the border of integrability and chaos in the sense that it exhibits chaotic behaviors though its solution is exactly solved by known functions (e.g., an elliptic function). In particular we present mappings associated with the duplication of an elliptic curve or rational elliptic surface. Also we investigate the ultradiscrete analogue of the mappings from the viewpoint of tropical geometry.